

## 展望・総説・総論

# リーマン多様体上の最適化法の制御工学への応用

佐 藤 一 宏 \*

## 1. はじめに

制御工学の主要な目的は「制御対象に適切な入力を加えて所望の出力を実現すること」である。この目的を達成するために、システム同定・モデル低次元化・制御器設計の3つが主要な問題となることが多い。システム同定とは物理法則や実験データを用いて制御対象の数理モデルを構築することであり、制御器設計は適切な入力を求めることである。制御器設計はシステム同定によって得られた数理モデルを利用しておこなうが、数理モデルが複雑になるほど難しくなる。複雑な数理モデルを単純化するのがモデル低次元化であり、多くの場合、システム同定の後にモデル低次元化をおこなう必要がある。

筆者は上述の制御工学の3つの主要問題に対して「リーマン多様体上の最適化法」を用いた研究をおこなってきた。システム同定に関しては3)～5)、モデル低次元化に関しては6)～11)、制御器設計に関しては12)の成果を得ている。「リーマン多様体上の最適化法」とは、リーマン多様体上の最適化問題を解くための方法のことである。すなわち、最適化すべき変数がリーマン多様体上に拘束されるという制約のもとで、ある目的関数を最小化（あるいは最大化）する問題を解くための方法が「リーマン多様体上の最適化法」である。

本稿では「リーマン多様体上の最適化法」がモデル低次元化という制御工学で重要な問題を研究する際にどのように役立つかということを解説する。なお、文献13)で解説されているようにさまざまな低次元化法がすでに提案されている。本稿で紹介するリーマン多様体上の最適化法は、これら既存法とはかなり異なるモデル低次元化法であることに注意したい。

## 2. モデル低次元化問題の重要性

本節では、モデル低次元化問題の重要性を説明する。

システム同定によって、

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

という線形システムが得られたとする。ここで、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$  は状態、 $u(t) \in \mathbb{R}^m$  は入力、 $y(t) \in \mathbb{R}^p$  は出力を表し、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 、 $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  は定数行列である。ただし、 $\mathbb{R}$  は実数全体の集合である。線形システム(1)は

- 非線形常微分方程式によって記述されるシステムの平衡点周りの近似
- 線形偏微分方程式によって記述されるシステムの空間方向の離散化

をおこなうことで現れる。すなわち、制御対象が本当の意味では(1)のような形で記述されるわけではない場合でも近似的に(1)のように記述されると考えられる場合がよくある。この観点は制御器設計の際にも重要であり、制御対象を線形システム(1)としてモデル化すると、多くの制御器設計問題は

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) \end{cases} \quad (2)$$

の $(A_c, B_c, C_c)$ を決定する凸最適化問題に帰着できることが知られている<sup>1)</sup>。すなわち、制御対象が(1)のような線形システムの場合は、(2)のような線形システムが制御器となり、 $(A_c, B_c, C_c)$ が決定されれば、図1に示したように制御対象(1)は制御器(2)によってフィードバック制御される。一方で、制御対象が線形システム(1)ではない場

\* 東京大学大学院 情報理工学系研究科  
(Kazuhiro Sato)

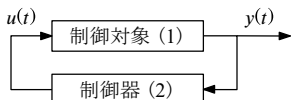


図 1 制御器 (2) による制御対象 (1) のフィードバック制御

合には制御器設計問題が凸最適化問題ではなくなり、解くこと、つまり制御器を設計することが難しくなることが知られている。

しかし、線形システム (1) を利用すると、制御器が常に設計可能かというそういうわけではない。実際に、線形システム (1) のための制御器は  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  ならば  $x_c(t) \in \mathbb{R}^n$  となることが通常である<sup>1)</sup>。すなわち、通常の制御器設計法を利用した場合、制御対象 (1) と制御器 (2) の状態の次元は一致する。このとき、制御器 (2) の  $(A_c, B_c, C_c)$  を決定する凸最適化問題を解くための計算量は  $O(n^3)$  よりも大きくなるのが通常であるため、 $n$  が非常に大きくなると凸最適化問題を数値的に解くことは難しくなる。

また、 $n$  が大きい場合に凸最適化問題を解いて  $n$  次元の状態を持つ制御器が得られたとしても、その制御器をマイコンなどへ実装することは現実的には難しい。これは  $n$  が大きいことによって以下の問題が生じるためである。

- マイコンのメモリはコストを抑えるために容量がそれほど大きくないことが通常であり、 $n$  が大きいとデータが保存できなくなる。また、コストを気にしないとしても、メモリの容量が大きくなるほどデータの読み出しや書き込みに時間がかかるため、容量は大きくできない。
- 制御器 (2) を用いると、入力  $u(t)$  の計算に積和演算が必要である。状態の次元  $n$  が増えるとその積和演算の回数が増え、結果として  $u(t)$  の計算のための消費電力が大きくなる。
- 制御器 (2) の状態の次元  $n$  が大きくなるほど、入力  $u(t)$  を方程式 (2) を用いて計算するための時間が大きくなる。入力  $u(t)$  の計算時間が大きくなると、制御対象 (1) に印加される入力は実際には時間遅れを含んだものになる。この時間遅れが大きくなるほど、システムの挙動が予測せぬものになり得る。

以上のことから、制御対象 (1) の状態の次元  $n$  はできるだけ小さい方が望ましい。本稿では、「リーマン多様体上の最適化法」を用いることで、状態の次元  $n$  が大きい制御対象 (1) の性質を保存しながら、ある意味で最適な低次元化システムを与えることができることを解説する。

### 3. リーマン多様体上の最適化法

本節では、リーマン多様体上の最適化法を手短に説明する。より詳しく知りたい読者は、多様体については 14)、リーマン多様体上の最適化については 2) を参照していただきたい。

$n$  次元の滑らかな多様体  $\mathcal{M}$  上の滑らかな関数  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  の最小化問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) \\ &\text{subject to} && x \in \mathcal{M} \end{aligned} \quad (3)$$

を考える。5 節と 6 節で説明するモデル低次元化問題は、(3) のような最適化問題として定式化可能である。

多様体  $\mathcal{M}$  の特別な場合がユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  であり、 $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$  の場合には、問題 (3) は

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k \quad (4)$$

という更新則を利用して解くことが多い。更新則 (4) の中の  $t_k > 0$  は点  $x_k$  におけるステップ幅、 $d_k \in \mathbb{R}^n$  を点  $x_k$  における探索方向という。探索方向  $d_k$  は目的関数の勾配  $\nabla f(x_k)$  の情報を用いて定められることが多く、例えば、 $d_k = -\nabla f(x_k)$  とした場合 (4) は最急降下法の更新式である。

しかし、多様体  $\mathcal{M}$  がユークリッド空間のようなベクトル空間ではない場合は、(4) のような更新則を利用することはできない。これは以下の理由のためである。

- ベクトル空間でない多様体には和が定義されているとは限らない。
- 仮に  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  のように、 $\mathcal{M}$  がユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の部分多様体だとすると、(4) の和を  $\mathbb{R}^n$  の和だと思えば和の計算が可能であるが、 $x_k \in \mathcal{M}$  であっても  $x_{k+1} \notin \mathcal{M}$  となる恐れがある。

また、 $\mathcal{M}$  が一般の多様体である場合には、目的関数の勾配を利用することができない。これは以下

の理由のためである。

- 勾配は考えている空間に内積が定義されて初めて定義できる概念である。
- 内積はベクトル空間に対してのみ定義可能であるが、一般の多様体はベクトル空間ではない。したがって、内積を一般の多様体に導入することはできない。

以上より、多様体上の最適化問題 (3) を考える際には

1. 和に関する問題
2. 勾配に関する問題

を解決しない限り、ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の場合のように  $d_k$  として関数  $f$  の勾配の情報を利用した (4) を用いることはできない。以下では、まず 2 の解決方法を紹介してから、1 の解決方法を紹介する。

上の 2 の問題を解決するためには、一般の多様体を考えるのではなくリーマン多様体を考えればよい。ここで、リーマン多様体とはリーマン計量  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  が導入された多様体のことであり、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  がリーマン計量であるとは多様体  $\mathcal{M}$  上の各点  $x$  での接空間に内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x: T_x \mathcal{M} \times T_x \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられていて、 $\langle \cdot, \cdot \rangle: x \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_x$  が  $\mathcal{M}$  上で滑らかなときにいう。例えば、ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  はリーマン多様体である。問題 (3) がリーマン多様体上の最適化問題の場合には、目的関数  $f$  の点  $x_k \in \mathcal{M}$  での勾配情報を探索方向  $d_k \in T_{x_k} \mathcal{M}$  に利用できる。ただし、リーマン多様体  $\mathcal{M}$  上の目的関数  $f$  の勾配  $\text{grad } f(x)$  は  $\mathcal{M}$  に導入されたリーマン計量  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を用いて、

$$df = \langle v, d \rangle_x \quad (5)$$

が任意の接ベクトル  $d \in T_x \mathcal{M}$  に対して成り立つ  $v \in T_x \mathcal{M}$  として定義する。ただし、接ベクトルは 14) で説明されているように方向微分だと考えることができるので、(5) の左辺は関数  $f$  の方向微分である。

上の 1 の問題を解決するために、測地線の利用を考えることができる。多様体  $\mathcal{M}$  上の測地線とは、ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  上の直線を一般化した概念である。多様体  $\mathcal{M}$  がユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の場合における更新式 (4) は、次の点  $x_{k+1}$  が現在の点  $x_k$  と

探索方向  $d_k$  によって定められる直線上を動いて決まるというように読める。これを参考に、多様体  $\mathcal{M}$  の場合には、次の点は現在の点と探索方向によって定められる測地線上を動いて決まるというように更新式を作ることを考えたい。多様体  $\mathcal{M}$  がリーマン多様体の場合には、オイラー・ラグランジュ方程式とよばれる 2 階の常微分方程式を積分することで測地線を求めることができる<sup>15)</sup>。より正確には、任意の  $\xi \in T_x \mathcal{M}$  に対して、0 を含む区間  $I \subset \mathbb{R}$  が存在し、 $\Gamma_{(x,\xi)}(0) = x$ ,  $\dot{\Gamma}_{(x,\xi)}(0) = \xi$  となる一意な曲線  $\Gamma_{(x,\xi)}: I \rightarrow \mathcal{M}$  が存在する。この曲線  $\Gamma_{(x,\xi)}$  が測地線である。多様体  $\mathcal{M}$  上の測地線  $\Gamma_{(x,\xi)}$  を用いることで、点  $x \in \mathcal{M}$  での指数写像  $\text{Exp}_x(\xi): T_x \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  が

$$\text{Exp}_x(\xi) := \Gamma_{(x,\xi)}(1)$$

と定義される。この指数写像を用いて多様体上の最適化問題 (3) では、ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  上の最適化問題における更新式 (4) を

$$x_{k+1} = \text{Exp}_{x_k}(t_k d_k) \quad (6)$$

と変更する。ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  上の場合には、 $\text{Exp}_{x_k}(t_k d_k) = x_k + t_k d_k$  となるので、(6) は (4) の一般化になっていることが確認できる。

以上で、リーマン多様体上の最適化問題 (3) の場合には、更新式は (6) で、探索方向  $d_k$  に目的関数  $f$  の点  $x_k$  での勾配  $\text{grad } f(x_k)$  を利用することができるようになった。正確な定義を述べると長くなるため省略するが、ヘシアン概念もリーマン多様体上の関数に対して定義できる。このような更新式 (6)、勾配、ヘシアンを用いて、ユークリッド空間上の最適化問題の場合によく利用される最急降下法・共役勾配法・ニュートン法・信頼領域法といったアルゴリズムは、リーマン多様体上の最適化問題 (3) の場合に一般化された形ですでに考案されている<sup>2)</sup>。また、ステップ幅  $t_k$  の決定法としてユークリッド空間上の最適化問題の場合によく用いられるアルミホの方法は、リーマン多様体上の最適化問題の場合にも若干の変更で一般化できる<sup>2)</sup>。

## 4. 伝達関数と $H^2$ ノルム

本稿ではモデル低次元化問題をリーマン多様体上の最適化問題として定式化するが、その際に伝

達関数や  $H^2$  ノルムの概念を必要とする. 本節では, 伝達関数と  $H^2$  ノルムについて簡単に紹介する.

線形システム (1) では,  $x(0) = 0$  のもとで, 時刻  $t$  の出力は

$$y(t) = \int_0^t H(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (7)$$

となる. ここで,

$$H(t) := C e^{At} B$$

であり, インパルス応答行列といわれる. 伝達関数とは, インパルス応答行列をラプラス変換したものであり,

$$G(s) := C(sI_n - A)^{-1} B \in \mathbb{C}^{p \times m}$$

のことである. ただし,  $\mathbb{C}$  は複素数全体の集合であり,  $I_n$  は  $n \times n$  の単位行列を表す. 伝達関数は  $x(0) = 0$  のもとでの入力と出力の比を表す関数だと考えられる. 実際に,  $x(0) = 0$  のもとで (1) をラプラス変換すると,

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (8)$$

という関係式が得られる. ただし,  $U(s)$  は入力  $u(t)$  のラプラス変換,  $Y(s)$  は出力  $y(t)$  のラプラス変換である. 線形システム (1) は入力, 出力に加えて状態も陽に考えていたが, 伝達関数を用いた関係式 (8) の中には状態の概念がないという相違がある.

線形システム (1) が漸近安定, すなわち, 行列  $A$  のすべての固有値の実部が負だとすると, 伝達関数  $G(s)$  のすべての成分は  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  で極を持たない, すなわち,  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  で解析的である. このとき, 伝達関数  $G$  の  $H^2$  ノルムが

$$\|G\|_{H^2} := \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tr}(G^*(i\omega) G(i\omega)) d\omega} \quad (9)$$

と定められる. これは以下のように線形システム (1) の係数行列  $A$ ,  $B$ ,  $C$  を用いて特徴付けることができる<sup>1)</sup>.

$$\|G\|_{H^2}^2 = \operatorname{tr}(B^T P B) = \operatorname{tr}(C^T Q C). \quad (10)$$

ただし,  $P$  と  $Q$  はリヤプノフ方程式

$$\begin{aligned} PA + A^T P + C^T C &= 0, \\ AQ + QA^T + BB^T &= 0 \end{aligned}$$

の解であり, 線形システム (1) が漸近安定であるならば, これらは一意に存在する. すなわち, 伝達関数の  $H^2$  ノルムは定義式 (9) によって計算する必要はなく, (10) を用いて計算すればよい.

## 5. リーマン多様体上の最適化法を用いた漸近安定な線形システム (1) のモデル低次元化

本節ではモデル低次元化問題を考えるが, 本来のシステムは (1) であり, 低次元化後のシステムは

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) \end{cases} \quad (11)$$

だとする. ただし,  $x_r(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $y_r(t) \in \mathbb{R}^p$  であり,  $r$  は  $n$  に比べてかなり小さい状況を想定している. このとき,  $(A_r, B_r, C_r) \in \mathbb{R}^{r \times r} \times \mathbb{R}^{r \times m} \times \mathbb{R}^{p \times r}$  を探索する最適化問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \|G - G_r\|_{H^2}^2 \\ &\text{subject to} && \begin{aligned} &\text{「低次元化後のシステムは} \\ &\text{本来のシステムと同じ} \\ &\text{性質を持つ」} \end{aligned} \end{aligned} \quad (12)$$

はモデル低次元化問題である. ただし,  $G$  は (1) の伝達関数で,  $G_r$  は (11) の伝達関数であり,

$$\|G - G_r\|_{H^2}^2 = \|C_e(sI_{n+r} - A_e)^{-1} B_e\|_{H^2}^2$$

であることに注意する. ここで,

$$A_e := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{pmatrix}, \quad B_e := \begin{pmatrix} B \\ B_r \end{pmatrix}, \quad C_e := (C \quad -C_r)$$

である. すなわち,  $G(s) - G_r(s)$  は

$$\begin{cases} \dot{x}_e = A_e x_e + B_e u \\ y_e = C_e x_e \end{cases}$$

という線形システムの伝達関数だと考えることができる.

目的関数として  $\|G - G_r\|_{H^2}^2$  を用いる理由は以下

の不等式が（本来のシステムと低次元化後のシステムが漸近安定であるという仮定のもとで）成り立つからである<sup>9)</sup>。

$$\sup_{t \geq 0} \|y(t) - y_r(t)\| \leq \|G - G_r\|_{H^2} \cdot \|u\|_{L^2}. \quad (13)$$

入力  $u$  は、通常、エネルギー  $\|u\|_{L^2}$  が小さくなるように設計しようとするので、 $\|u\|_{L^2}$  は比較的小さいと考えてよい。したがって、 $\|G - G_r\|_{H^2}$  が小さければ、不等式 (13) から、本来のシステムと低次元化後のシステムが出力を観測する限りでは区別がつかないということを意味しており、まさしく 2 つのシステムが近いということになる。

最適化問題 (12) の拘束条件「低次元化後のシステムは本来のシステムと同じ性質を持つ」というのは多様体上への拘束として考えることができる場合が多い。例えば、本来のシステムが漸近安定という性質を持つとしよう。これは、 $\mathbb{S}^{n \times n}$  を  $n \times n$  の安定な実行列全体の集合としたときに、 $(A, B, C) \in \mathbb{S}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n}$  であることと同値である。したがって、「低次元化後のシステムは本来のシステムと同じ性質を持つ」というのは、この場合、「低次元化後のシステムも漸近安定という性質を持つ」ということであるから、

$$(A_r, B_r, C_r) \in \mathbb{S}^{r \times r} \times \mathbb{R}^{r \times m} \times \mathbb{R}^{p \times r} \quad (14)$$

のことである。すなわち、「本来のシステムが漸近安定という性質を持つ」とした場合の最適化問題 (12) は

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \|G - G_r\|_{H^2}^2 \\ & \text{subject to} \quad (A_r, B_r, C_r) \in \mathbb{S}^{r \times r} \times \mathbb{R}^{r \times m} \times \mathbb{R}^{p \times r} \end{aligned} \quad (15)$$

のことである。しかし、 $\mathbb{S}^{r \times r}$  が多様体の構造を備えているかは非自明であり、(15) が多様体上の最適化問題になっているのかは明らかではない。しかし、筆者は文献<sup>9)</sup>の中で

$$\mathbb{S}^{r \times r} = \{(J - R)Q | (J, R, Q) \in \text{Skew}(r) \times \text{Sym}_+(r) \times \text{Sym}_+(r)\}$$

であることを示した。ただし、 $\text{Skew}(r)$  は  $r \times r$  の反対称行列全体の集合、 $\text{Sym}_+(r)$  は  $r \times r$  の正定値対称行列全体の集合である。このことと、伝達関数は任意の基底の変換行列を用いた座標変換で不変であることを利用することで、最適化問題 (15)

を考えることと

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \|G - \tilde{G}_r\|_{H^2}^2 \\ & \text{subject to} \quad (J_r, R_r, B_r, C_r) \in \mathcal{M} \\ & \quad \quad \quad := \text{Skew}(r) \times \text{Sym}_+(r) \\ & \quad \quad \quad \times \mathbb{R}^{r \times m} \times \mathbb{R}^{p \times r} \end{aligned} \quad (16)$$

を考えることは等価であることが導ける。ただし、 $\tilde{G}_r$  は

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = (J_r - R_r)x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) \end{cases} \quad (17)$$

の伝達関数である。直積集合  $\mathcal{M}$  は、各成分が多様体になっているため、多様体であり、最適化問題 (16) は多様体上の最適化問題ということになる。

多様体上の最適化問題 (16) を解くために、リーマン計量を導入し、3 節で説明したリーマン多様体上の最適化法を利用したい。ここでは、システムの漸近安定性を保証するためには行列  $R_r$  の正定値対称性を確実に保証する必要があることを念頭に、

$$\begin{aligned} & \langle (\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \kappa_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \kappa_2) \rangle_{P_r} \\ & := \text{tr}(\xi_1^T \xi_2) + \text{tr}(R_r^{-1} \eta_1 R_r^{-1} \eta_2) + \text{tr}(\zeta_1^T \zeta_2) + \text{tr}(\kappa_1^T \kappa_2) \end{aligned}$$

というリーマン計量を導入する。ただし、 $P_r := (J_r, R_r, B_r, C_r) \in \mathcal{M}$  である。右辺第二項の部分が他の項と異なる形をしているが、これが重要である。すなわち、リーマン計量をこのように導入することで、 $P_r \in \mathcal{M}$  を現在の点とすると次の点は

$$\begin{aligned} & \text{Exp}_{P_r}(\xi, \eta, \zeta, \kappa) \\ & = (J_r + \xi, R_r \exp(R_r^{-1} \eta), B_r + \zeta, C_r + \kappa) \end{aligned} \quad (18)$$

によって定められる。ただし、 $(\xi, \eta, \zeta, \kappa) \in T_{P_r} \mathcal{M}$  は探索方向である。式 (18) の右辺の第 2 成分は

$$R_r \exp(R_r^{-1} \eta) = R_r^{\frac{1}{2}} \exp(R_r^{-1/2} \eta R_r^{-1/2}) R_r^{1/2} \quad (19)$$

となるので、 $\text{Sym}_+(r)$  に含まれていることがわかる。すなわち、多様体  $\mathcal{M}$  上の点  $P_r$  を勾配情報を利用して定めた探索方向に伸びる測地線に沿って更新した際に次の点が多様体  $\mathcal{M}$  上にあることを確実に保証できる。つまり、アルゴリズムの反復途中であっても「低次元化後のシステムは本来の

システムと同じ性質を持つ」ことが保証される。さらに、リーマン計量を導入したので、リーマンの意味での目的関数の勾配を導出することができるが、これについては9)を参照していただきたい。3節で説明したように、指数写像と勾配が得られればリーマン多様体上の最適化法を利用することができるので、モデル低次元化問題(16)、すなわち(15)を解くことができる。

## 6. リーマン多様体上の最適化法を用いた漸近安定な機械システムのモデル低次元化

この雑誌は「機械の研究」という名前が付いているので、本節では、リーマン多様体上の最適化法を用いた機械システム

$$\begin{cases} M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) = Eu(t) \\ y(t) = C_1q(t) + C_2\dot{q}(t) \end{cases} \quad (20)$$

のモデル低次元化問題を紹介する。ただし、 $q(t) \in \mathbb{R}^n$  は一般化座標、 $u(t) \in \mathbb{R}^m$  は入力、 $y(t) \in \mathbb{R}^p$  は出力であり、 $M \in \text{Sym}_+(n)$  は慣性行列、 $D \in \text{Sym}_+(n)$  は減衰行列、 $K \in \text{Sym}_+(n)$  は剛性行列である。また、 $E, C_1, C_2$  は適当な次元の実行列である。

機械システム(20)は線形システム(1)に変換可能である。実際に、

$$x(t) := \begin{pmatrix} M^{1/2}q(t) \\ M^{1/2}\dot{q}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

という状態を導入し、

$$A := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -\bar{K} & -\bar{D} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{E} \end{pmatrix}, \quad C := (\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2)$$

と定めることで、(20)は(1)という形のシステムに変換される。ただし、

$$\begin{aligned} \bar{K} &:= M^{-1/2}KM^{-1/2}, & \bar{D} &:= M^{-1/2}DM^{-1/2}, \\ \bar{B} &:= M^{-1/2}B, & \bar{C}_1 &:= C_1M^{-1/2}, & \bar{C}_2 &:= C_2M^{-1/2} \end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} A &\in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -\bar{K} & -\bar{D} \end{pmatrix} \middle| \bar{K}, \bar{D} \in \text{Sym}_+(n) \right\}, \\ B &\in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{E} \end{pmatrix} \middle| \bar{E} \in \mathbb{R}^{n \times m} \right\}, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times 2n} \end{aligned}$$

という構造を  $(A, B, C)$  は持つ。また、このような

構造を持つ  $A$  は安定である<sup>6)</sup>。

5節で述べたように、「低次元化後のシステムは本来のシステムと同じ性質を持つ」という制約を満たすように、本来のシステムを低次元化したい。そのためには、低次元化後のシステム(11)の  $A_r$  と  $B_r$  が

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -K_r & -D_r \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ E_r \end{pmatrix}$$

という構造を備えていればよいことがわかる。ただし、 $K_r, D_r \in \text{Sym}_+(r)$  で  $E_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$  である。したがって、本来のシステムが漸近安定なシステム(1)の場合にはリーマン多様体上の最適化問題(16)だったが、本来のシステムが機械システム(20)の場合にはリーマン多様体上の最適化問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \|G - G_r\|_{H^2}^2 \\ &\text{subject to} \quad (K_r, D_r, B_r, C_r) \in \mathcal{N} \\ &\quad \quad \quad := \text{Sym}_+(r) \times \text{Sym}_+(r) \\ &\quad \quad \quad \times \mathbb{R}^{r \times m} \times \mathbb{R}^{p \times 2r} \end{aligned} \quad (21)$$

を考えることになる。ただし、この  $G$  は本来の機械システムの伝達関数であり、 $G_r$  は低次元化後の機械システムの伝達関数である。

5節の  $\mathcal{M}$  と同様に、 $\mathcal{N}$  も多様体になる。多様体  $\mathcal{N}$  上にリーマン計量

$$\begin{aligned} &\langle (\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \kappa_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \kappa_2) \rangle_{Q_r} \\ &:= \text{tr}(K_r^{-1} \xi_1 K_r^{-1} \xi_2) + \text{tr}(D_r^{-1} \eta_1 D_r^{-1} \eta_2) \\ &\quad + \text{tr}(\zeta_1^T \zeta_2) + \text{tr}(\kappa_1^T \kappa_2) \end{aligned}$$

を導入する。ただし、 $Q_r := (K_r, D_r, B_r, C_r) \in \mathcal{N}$  である。リーマン計量をこのように導入することで、 $Q_r \in \mathcal{N}$  を現在の点とすると次の点は

$$\begin{aligned} &\text{Exp}_{Q_r}(\xi, \eta, \zeta, \kappa) \\ &= (K_r \exp(K_r^{-1} \xi), D_r \exp(D_r^{-1} \eta), B_r + \zeta, C_r + \kappa) \end{aligned} \quad (22)$$

によって定められる。ただし、 $(\xi, \eta, \zeta, \kappa) \in T_{Q_r} \mathcal{N}$  は探索方向である。さらに、リーマン計量を導入したので、リーマンの意味での目的関数の勾配を導出することができるが、これについては6)を参照していただきたい。3節で説明したように、指数写像と勾配が得られればリーマン多様体上の最適化法を利用することができるので、モデル低次元化問題(21)を解くことができる。

## 7. おわりに

本稿では、制御器設計をおこなう際に重要なモデル低次元化問題がリーマン多様体上の最適化問題として定式化できることを説明した。3 節では定式化した問題を解くためのリーマン多様体上の最適化法について簡単にまとめたが、より詳しくは 2) を参考にしていきたい。

最後にモデル低次元化法を利用する際の注意点を述べる。制御対象が漸近安定な機械システム (20) としてモデル化できる状況を考えよう。このとき、筆者が 5 節と 6 節で紹介した 2 つの方法を利用することができる。この場合、5 節で紹介した方法は機械システムの構造は忘れて漸近安定性だけを保存するモデル低次元化法となる。一方で、6 節で紹介した方法は漸近安定性だけでなく、機械システムの構造も保存するモデル低次元化法である。評価指標  $\|G - G_r\|_{H^2}$  で比べると、5 節で紹介した方法の方がよくなることは明らかであるが、他の指標で比べると 6 節で紹介した結果の方がよくなることもあり得る。これは  $\|G - G_r\|_{H^2}$  という指標は本来のシステムと低次元化後のシステムの出力の差だけにしか関連しない指標であり、システムの内部状態の情報はまったく含まれていないためである。したがって、5 節と 6 節で紹介した 2 つの方法でモデル低次元化をおこない、得られた 2 つの低次元化モデルに対して制御器設計をおこなうということが考えられる。このとき、制御器がそれぞれのモデルに対して得られることになるが、どちらの制御器を利用したら閉ループ系の性能がよくなるかが問題である。筆者は制御対象が漸近安定な機械システム (20) としてモデル化できる状況なら、5 節の方法よりも 6 節の方法の方が、閉ループ系の性能の観点からはよい低次元化モデルを与えることができると予想しているが、

この探求は今後の課題である。

### 参考文献

- 1) 蛭原義雄：LMI によるシステム制御，森北出版株式会社 (2012)。
- 2) P.-A. Absil, R. Mahony and R. Sepulchre : Optimization Algorithms on Matrix Manifolds, Princeton University Press (2008)。
- 3) H. Sato and K. Sato : “Riemannian optimal system identification algorithm for linear MIMO systems”, IEEE Control Systems Letters, 1, 2 (2017) pp.376–381。
- 4) K. Sato, H. Sato, and T. Damm : “Riemannian optimal identification method for linear systems with symmetric positive-definite matrix”, IEEE Transactions on Automatic Control (accepted: DOI: 10.1109/TAC.2019.2957350)。
- 5) H. Sato and K. Sato : “Riemannian gradient online identification method for linear symmetric continuous-time systems”, 58th IEEE Conference on Decision and Control, Nice, France December 11–13 (2019) pp.3593–3598。
- 6) K. Sato : “Riemannian optimal model reduction of linear second-order systems”, IEEE Control Systems Letters, 1, 1 (2017) pp.2–7。
- 7) K. Sato and H. Sato : “Structure preserving  $H^2$  optimal model reduction based on Riemannian trust-region method”, IEEE Transactions on Automatic Control, 63, 2 (2018) pp.505–511。
- 8) K. Sato : “Riemannian optimal model reduction of linear port-Hamiltonian systems”, Automatica, 98 (2018) pp.428–434。
- 9) K. Sato : “Riemannian optimal model reduction of stable linear systems”, IEEE Access, 7 (2019) pp.14689–14698。
- 10) H. Sato and K. Sato : “A New  $H^2$  Optimal Model Reduction Method Based on Riemannian Conjugate Gradient Method”, 55th IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, USA, December 12–14 (2016) pp.5762–5768。
- 11) H. Sato and K. Sato : “Riemannian Trust-Region Methods for  $H^2$  Optimal Model Reduction”, 54th IEEE Conference on Decision and Control, Osaka, Japan, December 15–18 (2015) pp. 4648–4655。
- 12) K. Sato : “Riemannian optimal control and model matching of linear port-Hamiltonian systems”, IEEE Transactions on Automatic Control, 62, 12 (2017) pp.6575–6581。
- 13) A.C. Antoulas : “Approximation of large-scale dynamical systems”, SIAM (2015)。
- 14) 松本幸夫：多様体の基礎，東京大学出版会 (1988)。
- 15) 伊藤秀一：常微分方程式と解析力学，共立出版株式会社 (1998)。